数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 47-55

A Single Facility Location Problem with respect to Minisum Criterion

金沢大学大学院　金 正道 (Masamichi Kon)
金沢大学教育学部　久志本 茂 (Shigeru Kushimoto)

1. はじめに

平面上で施設をどこに配置するかを考える場合、配置する施設が単一か複数かによって単一施設配置問題と複数施設配置問題があり、さらに配置を考える空間で連続型モデルとネットワーク型モデルに大きく分類される。例えば、平面上の至るところで施設の配置が可能な場合は連続型モデルであり、道路網において、その沿道に面する場所に施設の配置が制限されているときはネットワーク型モデルが用いられる。また、配置する施設の種類によって問題（最適な配置の基準）は異なる。例えば、コミュニティーセンターなどの公共の施設を配置する場合は全利用者（需要点）と施設との距離の総和を最小にする minisum 型配置問題, 消防署などの緊急施設を配置する場合は施設から最も遠い利用者（需要点）までの距離を最小にする minimax 型配置問題などが考えられる。本稿では連続型単一施設 minisum 型配置問題を扱う。

一方、ユークリッド距離, 直角距離,ℓ_p 距離などさまざまな距離での配置問題が考えられている。P.Widmayer,Y.F.Wu and C.K.Wong [8] により複数の方向によって定まる距離 (A-距離) が提案されている。この A-距離での配置問題を考え、A-距離の性質から最適解の性質を導き、その性質を考慮したアルゴリズムを提案する。

2. A-距離

P.Widmayer,Y.F.Wu and C.K.Wong [8] によって示された結果を紹介する。R^2 において

$$A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$$

を与えられた複数の方向（角度）の集合とする。ただし、α_i は直交座標系における x 軸の正方向となす角度で

$$0 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_m < \pi$$

とする。

直線（半直線, 線分）の方向が A に属しているとき、その直線（半直線, 線分）を A-方向直線（半直線, 線分）とよぶ。

$B = \{L : A\text{-方向線分}\}$ とし、2 点 $x_1, x_2 \in R^2$ を結ぶ線分を $[x_1, x_2]$ と表すと A-距離は次のように定義される。

定義 2.1　A-距離

任意の $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}^2$ に対し

$$d_A(x_1,x_2) = \begin{cases} d_2(x_1,x_2) & [x_1,x_2] \in B \\ \min\limits_{x_3 \in \boldsymbol{R}^2} \left\{ d_2(x_1,x_3) + d_2(x_3,x_2) \,\middle|\, [x_1,x_3],[x_3,x_2] \in B \right\} & \text{その他} \end{cases}$$

ここで $d_2(x_1,x_2)$ は 2 点 x_1, x_2 間のユークリッド距離である。

さらに d_A は $\boldsymbol{R}^2$ における metric となることが知られている。

定理 2.1

任意の A に対し d_A は、常に高々 2 つの線分から構成される折れ線によって実現される。

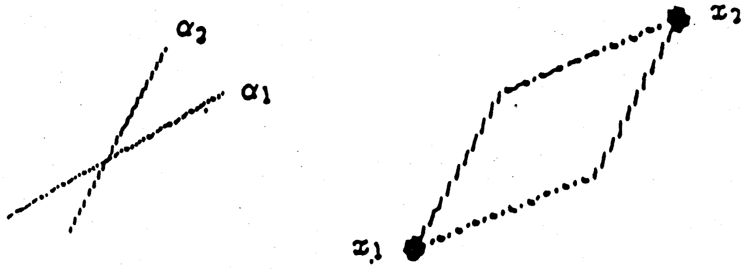

図 1. A-距離

定義 2.2　A-円

ある点 $y \in \boldsymbol{R}^2$ と距離 c に対して

$$\{x \in \boldsymbol{R}^2 | d_A(y,x) = c\}$$

を中心 y , 半径 c の A-円という。

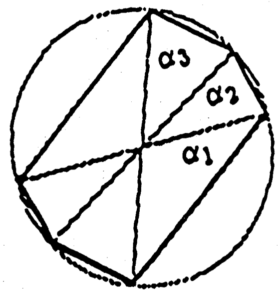

図 2. A-円

いま

$$\alpha_{m+k} = \pi + \alpha_k,\ k = 1, \cdots, m$$

とする。このとき

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < \pi \leq \alpha_{m+1} < \cdots < \alpha_{2m} < 2\pi$$

の関係がある。特に $\alpha_0 = \alpha_{2m} - 2\pi, \alpha_{2m+1} = \alpha_1 + 2\pi$ とおく。また

$$a_j = (\cos\alpha_j, \sin\alpha_j),\ j = 0, 1, \cdots, 2m+1$$

とする（図 3.）。

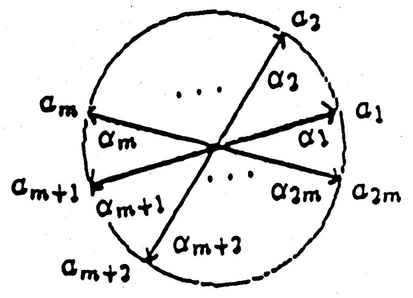

図 3.

もし $x \in R^2$ が $y \in R^2$ と α_j, α_{j+1} -方向半直線のなす領域にある（図 4.），すなわち

$$x \in y + \mathcal{C}\{a_j, a_{j+1}\}$$

なら 2 点 $x = (x^1, x^2), y = (y^1, y^2)$ 間の A-距離 $d_A(x, y)$ は

$$d_A(x,y) = \frac{(x^1 - y^1)(\sin\alpha_{j+1} - \sin\alpha_j) + (x^2 - y^2)(\cos\alpha_j - \cos\alpha_{j+1})}{\sin(\alpha_{j+1} - \alpha_j)} \tag{1}$$

と表せる。

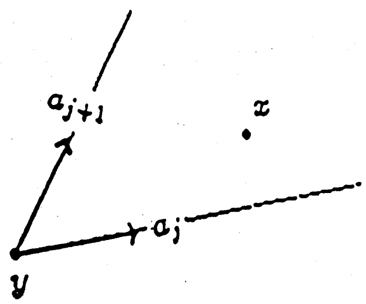

図 4.

補題 2.1

各 $y \in R^2$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = d_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とおくと f は凸関数となる。

3. Minisum 型配置問題

ここでは単一施設を配置する A-距離での minisum 型配置問題を考える。

R^2 において

$\boldsymbol{y}_i$	: 需要点 i の位置, $i = 1, \cdots, n$
$\boldsymbol{x}$	: 新たに配置する施設の位置
$d_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i)$	: 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i$ 間の A-距離
$w_i > 0$	: 需要点 i に付随する重み

とすると問題は次のように定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{x} \in R^2} F(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i d_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i)$$

補題 2.1 より F は凸関数となる。

まず、各需要点に対し、その点を通る A-方向直線をすべて引く。いま、引かれた各直線を

$$L_{ij} = \{\boldsymbol{y}_i + \gamma \boldsymbol{a}_j | \gamma \in R\},\ i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m$$

とし

$$\bigcup_{i,i'} \bigcup_{j \neq j'} (L_{ij} \bigcap L_{i'j'})$$

の元を交点という（図 5.）。

また、境界線がすべて L_{ij}, $i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m$ のどれかである凸多角形 $S(\subset R^2)$ で $\mathrm{int} S \neq \emptyset$ であり

$$(\mathrm{int}\ S) \bigcap L_{ij} = \emptyset,\ i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m$$

となる S を領域とよぶ（図 5.）。

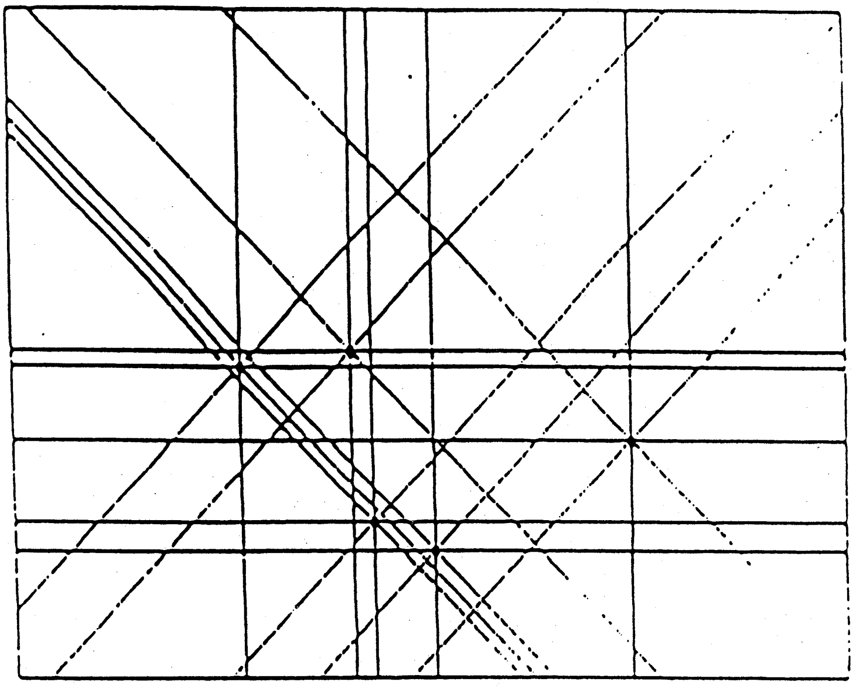

図 5. $A=\{0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\}$

任意の領域 S は、ある $j_i(1\leq j_i\leq 2m)$, $i=1,\cdots,n$ に対し

$$S=\bigcap_{i=1}^{n}(y_i+\mathcal{C}\{a_{j_i},a_{j_i+1}\})$$

と表せるので (1) より、ある領域 S 上 F は linear になる。このことより次の定理が導かれる。

定理 3.1 .

問題 (2) の最適解で交点であるものが存在する。

定理 3.2

隣接する有界な領域を S_1,S_2 とする。$x^*\in\mathrm{int}S_1$ が問題 (2) の最適解なら $\overline{x}\in\mathrm{int}S_2$ は最適解ではない。

次に、境界が A-方向線分からなり $\{y_1,\cdots,y_n\}$ を含む凸多角形の集合を

$$\{P_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$$

とし

$$P=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda$$

とする。具体的には P は境界が $\{y_1, \cdots, y_n\}$ の A-方向支持直線からなり、$\{y_1, \cdots, y_n\}$ を含む最小の凸多角形になる（図 6.）。

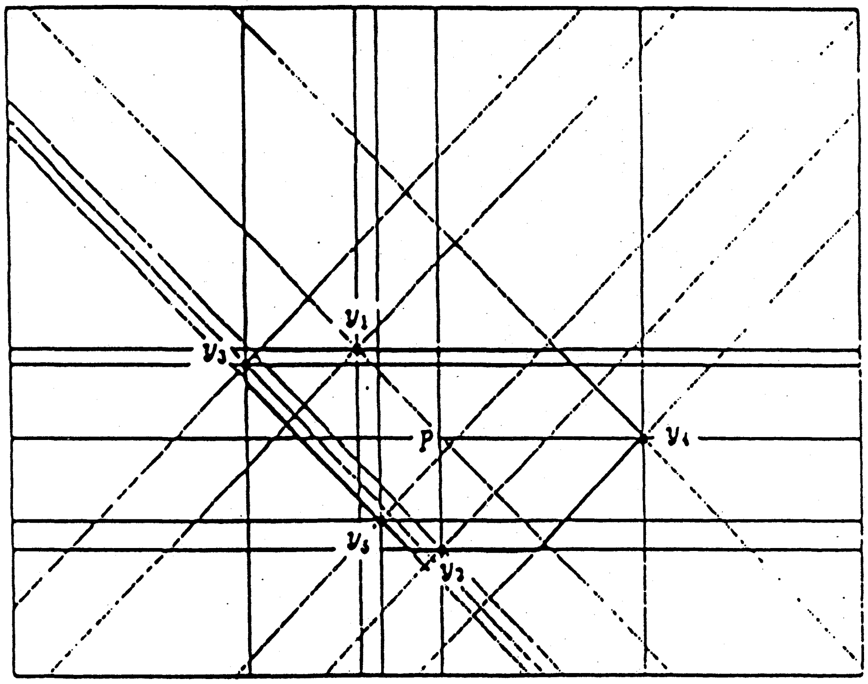

図 6. $\{y_1, \cdots, y_5\}$ に対する P, $A = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$

定理 3.3

問題 (2) の最適解は必ず P 上にある。

定理 3.1 と定理 3.3 より問題 (2) の最適解で P 上の交点であるものが存在することがわかっているので任意の需要点を初期値として P 上の交点だけをたどる反復法によって（交点である）最適解を求めることを考える。

アルゴリズムで r 回目の反復の後 $x^{(r)}$ が得られているとする。

各需要点に対し、その点を通る A-方向直線を引いたときに交点 $x^{(r)}$ を通る A-方向直線の方向で、P から出ないような方向を

$$a_{r_1}, \cdots, a_{r_p}, 1 \leq r_j \leq 2m (j = 1, \cdots, p)$$

とする。

問題 (2) の目的関数 $F(x)$ に対して $x_0 \in R^2$ における $F(x)$ の $y \in R^2, y \neq \mathbf{o}$ である y 方向の右側微係数を $\partial_+ F(x_0; y)$ で表し

$$u^{(r)} = \min_{j=1,\cdots,p} \left\{ \partial_+ F(x^{(r)}; a_{r_j}) \right\} \tag{3}$$

とする。

もし

$$u^{(r)} \geq 0$$

ならば、目的関数 F の凸性より $x^{(r)}$ は最適解となる。

定理 3.2 と定理 3.3 より最適解の集合は、ある交点 1 点か、ある 1 つの線分か、またはある 1 つの領域になることがわかる。

次に問題 (2) を解くためのアルゴリズムを示すが、P があらかじめわかっているとする。

アルゴリズム

1. 初期値として P 上の任意の交点を $x^{(0)}$ とする。(ここでは重みの最も大きい任意の需要点を初期値として選んだ。) $r=0$ とする。
2. $u^{(r)}$ を求める。
3. $u^{(r)}>0$ なら終了。$x^{(r)}$ が最適解である。
4. $u^{(r)}=0$ なら終了。$u^{(r)}=0$ (i.e. $\partial_+F(x^{(r)};a_{r_k})=0$) となる a_{r_k} が
   (a) 1 つなら $x^{(r)}$ と a_{r_k} 方向の $x^{(r)}$ と隣接する交点を結ぶ線分上の任意の点が最適解である。
   (b) 2 つなら、その 2 方向を$a_{r_{k_1}}, a_{r_{k_2}}$ と $x^{(r)}$ とで特徴づけられる領域上の任意の点が最適解である。
5. そうでなかったら (すなわち $u^{(r)}<0$) (3) を満たす a_{r_k} を任意に 1 つ選び、a_{r_k} 方向の $x^{(r)}$ と隣接する交点を $x^{(r+1)}$ とする。$r=r+1$ としてステップ 2 へ。

このアルゴリズムの収束性は同じ点を繰り返さないことと交点の数が有限であることからいえる。

4. 数値例

問題 (2) において $n=5$ とし

$$A=\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= (63,97) & w_1 &= 1\\
y_2 &= (102,7) & w_2 &= 1\\
y_3 &= (10,90) & w_3 &= 1\\
y_4 &= (197,57) & w_4 &= 1\\
y_5 &= (73,20) & w_5 &= 1
\end{aligned}$$

とする（図 5,6 ）。初期値を $x^{(0)} = y_1 = (63,97)$ として、この問題にアルゴリズムを適用すると次の計算結果が得られる。

$$x^{(0)} = (63,97)$$
$$x^{(1)} = (63,90)$$
$$x^{(2)} = (63,57)$$
$$x^{(3)} = (73,57)$$
$$x^{(4)} = (73,36)$$

最適解は $x^{(4)} = (73,36)$ で、最適値は $F(x^{(4)}) = 340.22$ となる（図 7. ）。

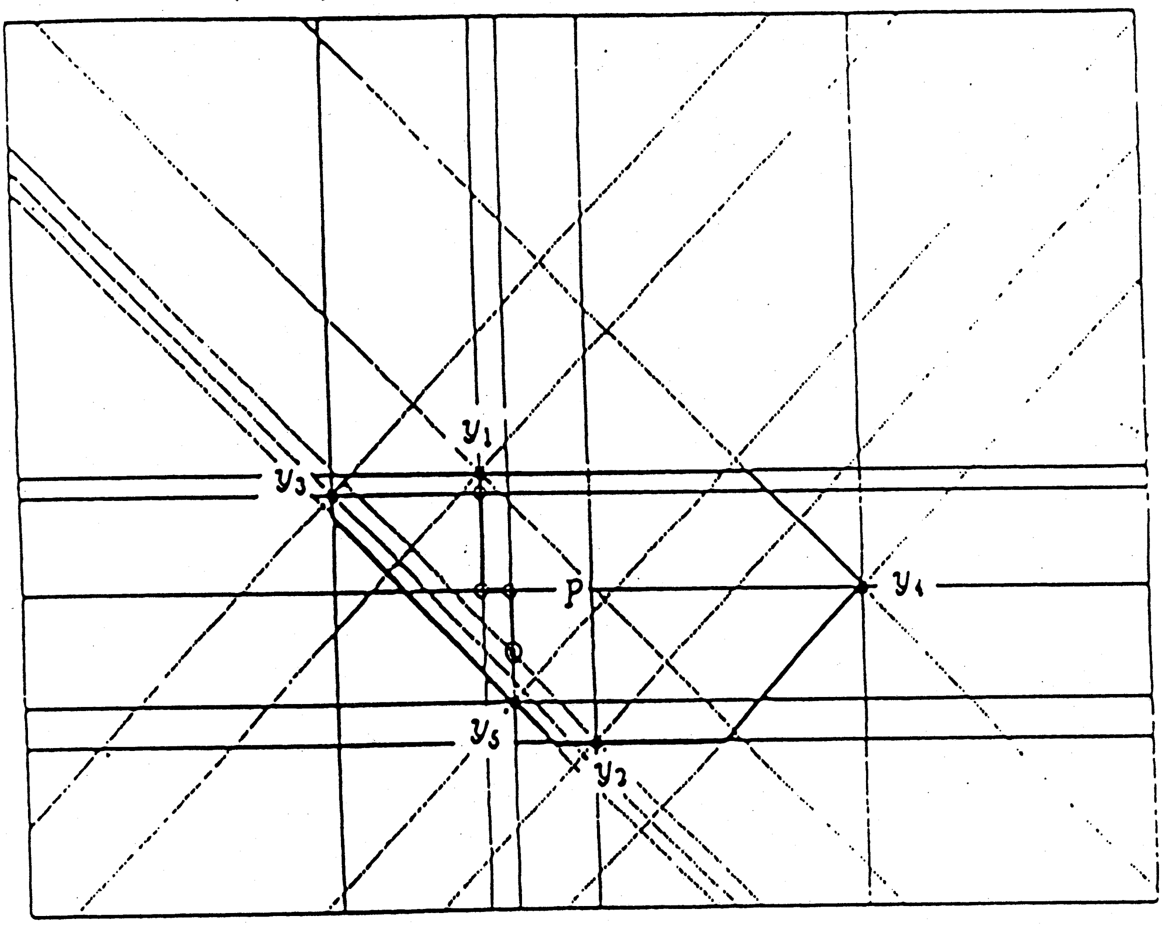

図 7. ⊙ :最適解

参考文献

[1] Z.Drezner and A.J.Goldman, "On the Set of Optimal Points to the Weber Problem", Trans.Sci.,Vol.25,No.1,1991,3-8

[2] Z.Drezner and G.O.Wesolowsky, "The Asymmetric Distance Location Problem", Trans.Sci.,Vol.23,No.3,1989,201-207

[3] R.T.Rockafellar,"Convex Analysis", Princeton University Press,Princeton,N.J.,1970

[4] Shôgo SHIODE and Hiroaki ISHII, "A SINGLE FACILITY STOCHASTIC LOCATION PROBLEM UNDER A-DISTANCE", Ann.Oper.Res.,Vol.31,1991,469-478

[5] J.E.Ward and R.E.Wendell, "Using Block Norms for Location Modeling", Oper.Res.,Vol.33,1985,1074-1090

[6] J.E.Ward and R.E.Wendell, "A New Norm for Measuring Distance Which Yields Linear Location Problems", Oper.Res.,Vol.28,No.3,1980,836-844

[7] R.E.Wendell,A.P.Hurter,Jr. and T.J.Lowe, "Efficient Points in Location Problems", AIIE Trans.,Vol.9,No.3,1977,238-246

[8] P.Widmayer,Y.F.Wu and C.K.Wong, "ON SOME DISTANCE PROBLEMS IN FIXED ORIENTATIONS", SIAM J.Comput.,Vol.16,1987,728-746

[9] 今野 浩, 山下 浩, "非線形計画法", 日科技連, 1978

[10] 久志本 茂, "最適化問題の基礎", 森北出版, 1979